13 Mouvement dans un champ de gravitation

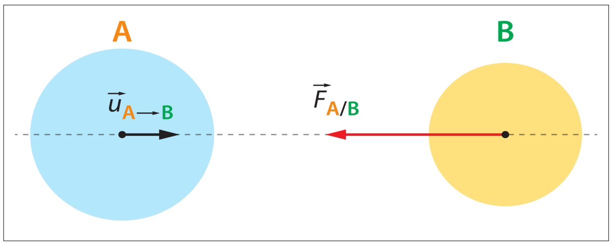
TÉ

1. Rappel de première : interaction gravitationnelle

• L'interaction gravitationnelle explique l'attraction à distance entre deux objets massifs.

↳ La force exercée par l'objet A de masse m_A sur l'objet B de masse m_B, éloignés l'un de l'autre de la distance d, vaut :

$$\vec{F}_{A/B} = -G \times \frac{m_A \times m_B}{d^2} \times \vec{u}_{A \to B}$$



↳ En faisant apparaître le champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}$ créé par l'objet A, la force subie par l'objet B est :

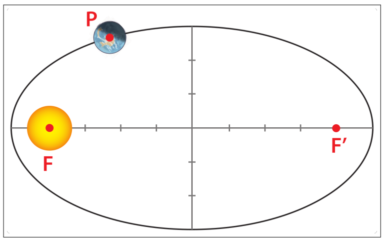
$$\vec{F}_{A/B} = m_B \times \vec{\mathcal{G}} \text{ avec } \vec{\mathcal{G}} = -G \times \frac{m_A}{d^2} \times \vec{u}_{A \to B}$$

• G est la constante de gravitation universelle qui vaut : $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

2. Lois de Kepler

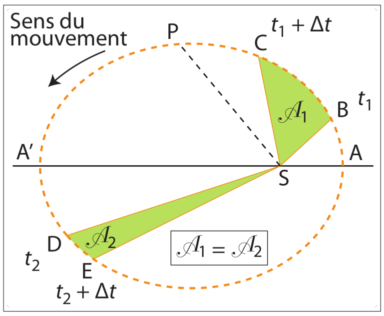
2.1. Première loi de Kepler : loi des orbites

• Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre d'une planète est une ellipse dont l'un des foyers est le Soleil.



2.2. Deuxième loi de Kepler : loi des aires

• Le segment qui relie le centre du Soleil à celui de la Planète balaie des aires égales pendant des durées égales.



2.3. Troisième loi de Kepler : loi des périodes

• Pour toutes les planètes du système solaire, le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est constant et égal à une même valeur, où T est la période de révolution de la planète autour du Soleil, et « a » la longueur du demi-grand axe de l'ellipse.

↳ Dans le cas d'une orbite circulaire de rayon R, le rapport est constant et vaut $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G \times M_S}$ où R est le rayon de l'orbite et M_S la masse du Soleil.

3. Étude d'un mouvement dans un champ de graviation

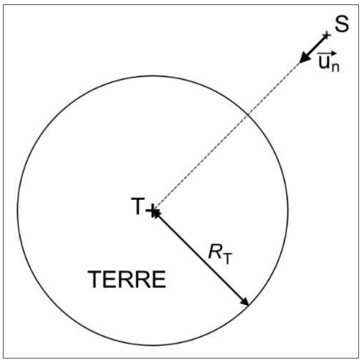
1. Énoncé du problème

• EarthCARE (Earth Clouds, Aerosols and Radiation Explorer) est un satellite d'observation de l'atmosphère terrestre. Le satellite effectue environ 16 fois le tour de la Terre chaque jour.

On considère que le satellite EarthCARE (noté S, de masse M_S) supposé ponctuel, est en mouvement circulaire autour de la Terre, à une altitude h = 390 km.

• Données : Constante G, Masse de la Terre M_T, Rayon de la Terre R_T.

D'après Bac 03/23, Liban, Jour 2.



2. Définition du système – Choix du référentiel

• Le système étudié est le {Satellite} modélisé par un point matériel de masse M_S.

• On se place dans le référentiel géocentrique considéré comme galiléen.

3. Inventaire des forces appliquées au système

• La seule force subie par le satellite est l'attraction gravitationnelle exercée par la Terre notée T :

$\vec{F}_{T/S} = M_S \times \vec{\mathcal{G}}_{\text{créé par la Terre}}$ avec $\vec{\mathcal{G}}_{\text{créé par la Terre}} = -G \times \frac{M_T}{d^2} \times \vec{u}_{T \to S}$

où d est la distance entre le centre de la Terre et le satellite, et $\vec{u}_{T \to S}$ le vecteur unitaire orienté de la Terre vers le satellite.

↳ Avec les données de l'énoncé, $d = R_T + h$ et $\vec{u}_{T \to S} = -\vec{u}_n$. L'expression du champ gravitationnel devient : $\vec{\mathcal{G}}_{\text{créé par la Terre}} = \frac{G \times M_T}{(R_T + h)^2} \times \vec{u}_n$.

↳ $\vec{F}_{T/S}$ est attractive, orientée vers la Terre.

4. Utilisation de la deuxième loi de Newton pour exprimer le vecteur accélération $\vec{a}$

• La deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\Sigma \vec{F} = M_S \vec{a}$$

où $\vec{a}$ est l'accélération du système dans le référentiel choisi.

• Ici, il vient donc : $\vec{F}_{T/S} = M_S \vec{a}$ soit $M_S \times \vec{\mathcal{G}}_{\text{créé par la Terre}} = M_S \vec{a}$ et enfin :

$$\boxed{\vec{a} = \vec{\mathcal{G}}_{\text{créé par la Terre}}}$$

• En projetant dans le repère de Frenet $(S, \vec{u}_n, \vec{u}_t)$: $\begin{pmatrix} a_n = \frac{G \times M_T}{(R_T + h)^2} \\ a_t = 0 \end{pmatrix}$ puisque $\vec{\mathcal{G}}_{\text{créé par la Terre}} = \frac{G \times M_T}{(R_T + h)^2} \times \vec{u}_n$.

5. Nature du mouvement et Expression de la vitesse

• Dans le repère de Frenet $(S, \vec{u}_n, \vec{u}_t)$, et en tenant compte de l'altitude, les coordonnées de l'accélération sont : $\begin{pmatrix} a_n = \dfrac{v^2}{R_T+h} \\ a_t = \dfrac{dv}{dt} \end{pmatrix}$, pour un mouvement circulaire avec $R_T + h = Cte$.

↳ On en déduit les relations suivantes : $\dfrac{v^2}{R_T+h} = \dfrac{G \times M_T}{(R_T+h)^2}$ et $\dfrac{dv}{dt} = 0$.

• De la seconde relation $\dfrac{dv}{dt} = 0$ on tire v(t) = Cte. La valeur de la vitesse ne varie pas au cours du temps, le mouvement donc est uniforme.

Le mouvement est circulaire uniforme.

• De la première relation on tire : $v^2 = \dfrac{G \times M_T}{R_T+h}$ et finalement l'expression de la vitesse : $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_T}{R_T+h}}$, qui confirme qu'elle est constante (G, M_T, R_T et h sont constants)

6. Périodicité du mouvement

• Connaissant la durée T de révolution du satellite pour parcourir son orbite circulaire de rayon $R_T + h$, on peut exprimer la vitesse du satellite de la façon suivante :

$$v = \frac{\text{longueur de l'orbite}}{T} = \frac{2\pi \times (R_T+h)}{T}.$$

• À partir de l'expression précédente, on déduit la relation suivante :

$$\frac{2\pi \times (R_T+h)}{T} = \sqrt{\frac{G \times M_T}{R_T+h}}$$

En arrangeant les termes, il vient :

$$\frac{4\pi^2 \times (R_T+h)^2}{T^2} = \frac{G \times M_T}{R_T+h}$$

puis : $\dfrac{T^2}{(R_T+h)^3} = \dfrac{4\pi^2}{G \times M_T}$

où l'on reconnaît la troisième loi de Kepler $\dfrac{T^2}{a^3} = Cte$ pour les objets en orbite circulaire autour de la Terre avec $a = R_T + h$.