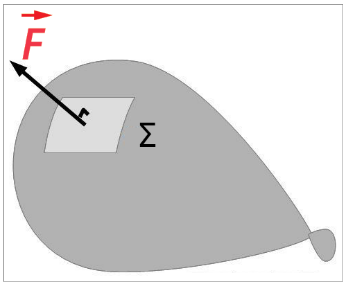
14 Modélisation de l'écoulement d'un fluide

TÉ

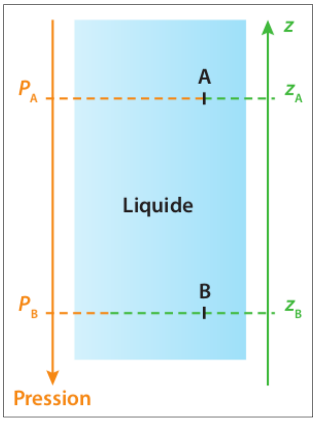
1.1. Forces pressantes



• La force pressante $\vec{F}$ exercée par un fluide emprisonné dans un ballon (en raison des chocs des particules du fluide sur l'enveloppe) sur la surface Σ a les caractéristiques suivantes :

↳ La force s'exerce en tous les points de la surface Σ, il n'y a pas de point d'application particulier : l'action est répartie. Pour la représentation, on choisit arbitrairement un point de Σ quelconque.
↳ La force pressante est perpendiculaire à la surface au point choisi.
↳ La force s'exerce du fluide vers la paroi.
↳ La valeur de la force pressante est proportionnelle à la pression qui règne dans le fluide et à l'aire de Σ : $F = P \times S$ avec F en N, P en Pa et S en m^2.

1.2. Loi fondamentale de la statique des fluides



• En présence de gravité, la pression croit avec la profondeur, quel que soit le fluide.

> **La loi fondamentale de la statique des fluides relie la différence de pression entre deux points A et B d'un fluide <u>incompressible</u> et <u>au repos</u>, de masse volumique ρ, avec la différence de hauteur entre ces deux points :**
>
> $$P_B - P_A = \rho \cdot g \cdot (z_A - z_B)$$
>
> **avec P en Pa ; z en m ; ρ en kg·m^{-3} ; g intensité de la pesanteur en m·s^{-2}.**

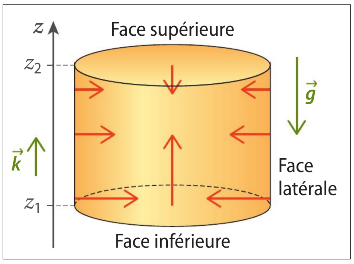
↳ L'axe des coordonnées verticales est impérativement orienté vers le haut.

↳ L'accroissement de la pression dans le cas d'un fluide compressible est modélisé par une relation mathématique différente.

Fluide incompressible

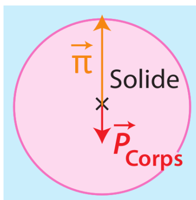
> **Un fluide incompressible possède une masse volumique indépendante de la pression.**

2. Poussée d'Archimède



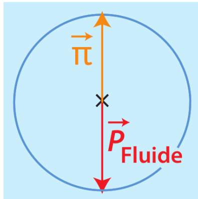
• La variation de la pression avec la profondeur pour un fluide au repos, explique la poussée d'Archimède.

↳ La pression au sommet d'un système plongé dans le fluide est inférieure à la pression au bas du système.
En conséquence, les forces pressantes exercées sur la face inférieure sont plus grandes que celles exercées sur la face supérieure.
↳ Les forces pressantes latérales se compensent.



> **La somme des forces exercées par un fluide à <u>l'équilibre</u> sur un système immergé (totalement ou partiellement) est la poussée d'Archimède, notée $\vec{\pi}$. Cette force est :**
> **↳ verticale**
> **↳ orientée vers le haut**
> **↳ de valeur égale au poids du volume de fluide déplacé :**
> $\|\vec{\pi}\| = m_{fluide\ déplacé} \times g = \rho_{fluide} \times V_{fluide\ déplacé} \times g$.

• Pour justifier cette valeur, on imagine un système occupant exactement le même volume que le système étudié, mais constitué uniquement de fluide.



↳ Ce système est en équilibre à la profondeur considérée. Les forces de pression, c'est-à-dire la poussée d'Archimède, compensent son poids : $\vec{\pi}+\vec{P}_{\text{fluide déplacé}}=\vec{0}$.

L'expression vectorielle de la poussée d'Archimède est : $\vec{\pi}=-\rho_{\text{fluide}}\times V_{\text{fluide déplacé}}\times\vec{g}$

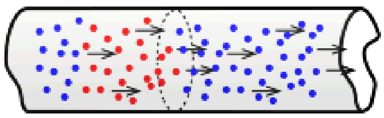
3.1. Écoulement d'un fluide

• Pour étudier un mouvement, il est toujours nécessaire de préciser un référentiel. Dans la suite le référentiel choisi est celui du laboratoire, considéré comme Galiléen.

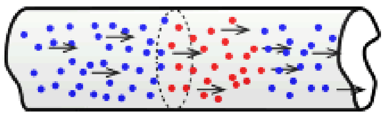
• Le système étudié est une particule de fluide. Il s'agit d'un petit volume de fluide, d'une taille variable de l'ordre du µm, de masse constante, qui peut se déformer, se dilater (ou se contracter) ou encore tourner sur lui-même.

3.2. Débit volumique à travers S

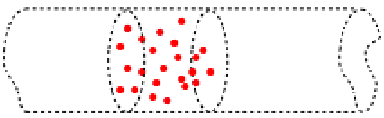
• Pour caractériser les écoulements de fluides, on introduit une nouvelle grandeur, le débit volumique D_V. Le débit volumique est le volume de fluide V écoulé à travers une surface S, par unité de temps.



À l'instant t_1, on enclenche la mesure du volume de fluide à travers la section S.



À l'instant t_2 on stoppe la mesure du volume.



La section S a « vu passer » un volume V pendant une durée $\Delta t = t_2 - t_1$.

Le débit volumique D_V qui traverse la surface S est le rapport du volume V à la durée Δt mise pour la traverser :

$$D_V=\frac{V}{\Delta t}$$

avec V en m^3, Δt en secondes (s) et D_V en $m^3\cdot s^{-1}$.

3.3. Expression du débit volumique pour un fluide incompressible

• Dans le cas d'un fluide incompressible, on peut montrer que le débit volumique s'exprime par : $D_V=S\times v$.
↳ Le volume qui traverse S est constant au cours du temps et peut s'écrire : $V=S\times d$ où d est la hauteur du cylindre de section droite S.
↳ $D_V=\frac{S\times d}{\Delta t}$. On reconnaît la vitesse du v du fluide à travers S : $v=\frac{d}{\Delta t}$. Soit finalement $D_V=S\times v$.

Avec S la surface de la section droite traversée et v la vitesse du fluide en ce point, le débit volumique d'un fluide <u>incompressible</u> à travers S vaut :

$$D_V=S\times v$$

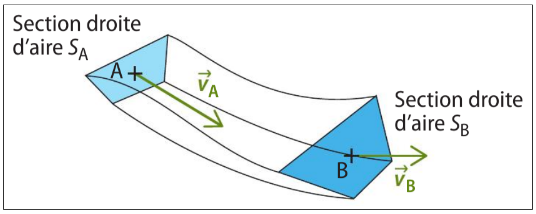
avec S en m^2 ; v en $m\cdot s^{-1}$ et D_V en $m^3\cdot s^{-1}$.

3.4. Conservation du débit volumique d'un fluide incompressible

• Pour un fluide incompressible, le débit volumique se conserve.

Le débit volumique d'un fluide <u>incompressible</u> est constant et uniforme à travers toute section d'un tube de courant : D_V = constante.

En conséquence : $S_A \times v_A = S_B \times v_B$



Ligne de courant – Tube de courant

La tangente en chaque point M d'une ligne de courant coïncide avec le vecteur vitesse en ce point.
Un tube de courant est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé

3.5. Extension aux fluides compressibles

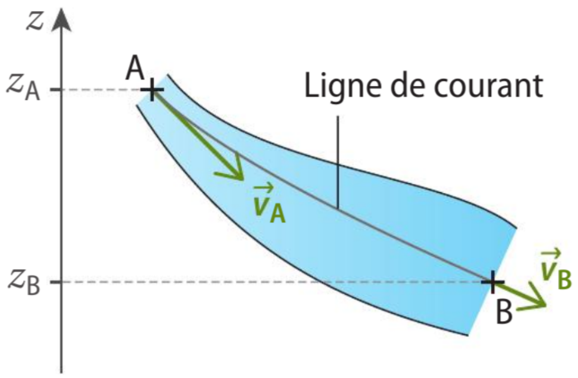
• Les résultats établis pour les fluides incompressibles sont valables pour les fluides compressibles si :
↳ l'écoulement se fait en régime permanent
↳ la vitesse de l'écoulement est très inférieure à la vitesse du son dans le fluide.

Régime permanent

Un écoulement s'effectue en régime permanent lorsque le vecteur vitesse en chaque point du fluide reste constant au cours du temps.

4.1. Relation de Bernoulli

• On étudie l'écoulement incompressible en régime permanent d'un fluide non visqueux.



Pour un <u>fluide non visqueux</u>, l'énergie mécanique d'une particule fluide est constante au cours de son déplacement.
En prenant en compte son énergie cinétique, son énergie potentielle de pesanteur et l'énergie potentielle liée aux forces de pression, Bernoulli a démontré que, pour un fluide <u>incompressible</u> (ou compressible avec $v \ll c_{son}$) en <u>régime permanent</u> :

$$P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$ **le <u>long d'une ligne de courant</u>.**

P_A et P_B : pressions aux points de mesure (Pa)
v_A et v_B : vitesses d'écoulement ($m{\cdot}s^{-1}$)
z_A et z_B : altitudes des points de mesure (m)
ρ : masse volumique du fluide ($kg{\cdot}m^{-3}$)
g : intensité de pesanteur ($m{\cdot}s^{-2}$)
La quantité $P + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2$ s'exprime en joules par mètre cube ($J{\cdot}m^{-3}$)

La relation de Bernoulli a plusieurs conséquences :

4.2. Fluide au repos – Hydrostatique

• Pour un fluide incompressible au repos, la vitesse en ses différents points est nulle. On reconnaît alors dans la relation de Bernoulli la loi fondamentale de la statique des fluides §1.2.

$$P_A+\rho g z_A+0=P_B+\rho g z_B+0$$

4.3. Écoulement horizontal

• Lorsque l'écoulement est horizontal, on peut annuler les altitudes des points de mesures :

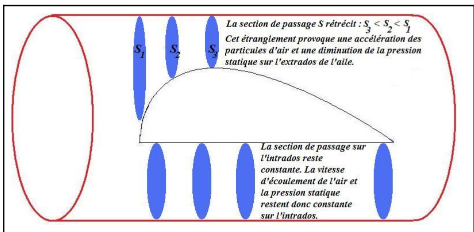
$$P_A+0+\frac{1}{2}\rho v_A^2=P_B+0+\frac{1}{2}\rho v_B^2$$

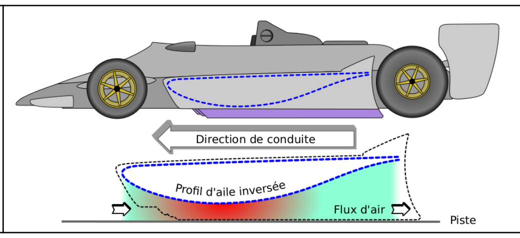
↳ La relation de Bernoulli est alors : $P_A+\frac{1}{2}\rho v_A^2=P_B+\frac{1}{2}\rho v_B^2$ qui devient : $P_B-P_A=\frac{1}{2}\rho(v_A^2-v_B^2)$.

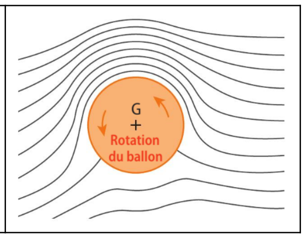
• Pour un écoulement horizontal, si la vitesse en B est plus grande que la vitesse en A, la pression en B est inférieure à la pression en A : $v_B > v_A \Leftrightarrow P_B < P_A$.

↳ C'est « l'effet Venturi » ou Dépression dans un étranglement.
En effet, dans un étranglement, la surface à travers laquelle le fluide s'écoule est plus faible, et la conservation du débit volumique implique : $S_B < S_A \Leftrightarrow v_B > v_A$.

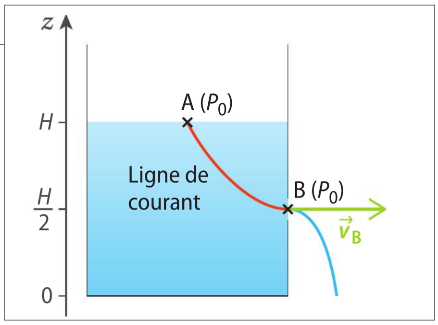
↳ L'effet Venturi explique notamment le vol des avions (Portance) la tenue de route des formules 1 (Effet de sol) ou les trajectoires incurvées des ballons de foot (Effet Magnus)







4.4. Vidange d'un réservoir ouvert



• Lors de la vidange d'un réservoir, la pression à la surface du liquide et à l'orifice de vidange sont les mêmes puisqu'il s'agit de la pression atmosphérique $P_A = P_B = P_{atm}$. La relation de Bernoulli se simplifie en éliminant P_{atm} dans les deux membres :

$$\rho g z_A+\frac{1}{2}\rho v_A^2=\rho g z_B+\frac{1}{2}\rho v_B^2$$

↳ En supposant que v_A est négligeable devant v_B et en simplifiant par ρ, on peut isoler la vitesse d'éjection du fluide en B :
$g z_A+\frac{1}{2}v_A^2=g z_B+\frac{1}{2}v_B^2$ d'où $v_B^2=2g(z_A-z_B)$ et enfin :

$$v_B=\sqrt{2g(z_A-z_B)}$$ Formule de Torricelli.

Attention : il faut vérifier les hypothèses de validité avant d'appliquer la relation de Bernoulli ou ses conséquences :
↳ Régime permanent
↳ Fluide incompressible (ou compressible avec $v \ll c_{son}$)
↳ Fluide non visqueux
↳ Le long d'une ligne de courant