00 Évolution temporelle régie par une équation différentielle du premier ordre

TÉ

1. Objectif

Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec un second membre constant.

2. Position du problème

En mathématiques, ce type d'équation s'écrit sous la forme : $y'(x)=m\times y(x)+p$.
Entre physiciens ou chimistes, on préférera :

$$\boxed{\frac{dx}{dt}+\frac{x}{\tau}=\frac{x_f}{\tau}\ (1)}$$

en précisant la condition initiale $x(t=0)=x_0$.

Notations	Variable	Fonction	Dérivée		
Mathématiques	x	y(x)	y'(x)	m	p
Physique Chimie	t	x	$\frac{dx}{dt}$	$-\frac{1}{\tau}$	$\frac{x_f}{\tau}$

3. Résolution

La solution générale de l'équation (1) est la somme d'une solution particulière et d'une fonction solution de l'équation homogène (sans second membre)

• L'équation homogène s'écrit : $\frac{dx}{dt}+\frac{x}{\tau}=0$, et l'on regroupe les variables sous la forme : $\frac{dx}{x}=-\frac{1}{\tau}\times dt$.

On « primitive » sans oublier la constante d'intégration C : $\ln(x)=-\frac{t}{\tau}+C$.

Enfin, en prenant l'exponentielle des deux membres, il vient : $x(t)=K\times e^{-\frac{t}{\tau}}$, K étant la constante telle que $\ln(K)=C$.

• La solution particulière est classiquement la constante que l'on obtient en annulant le terme $\frac{dx}{dt}$. Ici, $x=x_f$ est une solution particulière de (1)

• La solution générale est la somme des solutions générale et particulière : $x(t)=K\times e^{-\frac{t}{\tau}}+x_f$.

• La condition initiale permet de déterminer la valeur de K : $x(t=0)=K\times e^{-\frac{0}{\tau}}+x_f$ d'où : $K=x_0-x_f$.

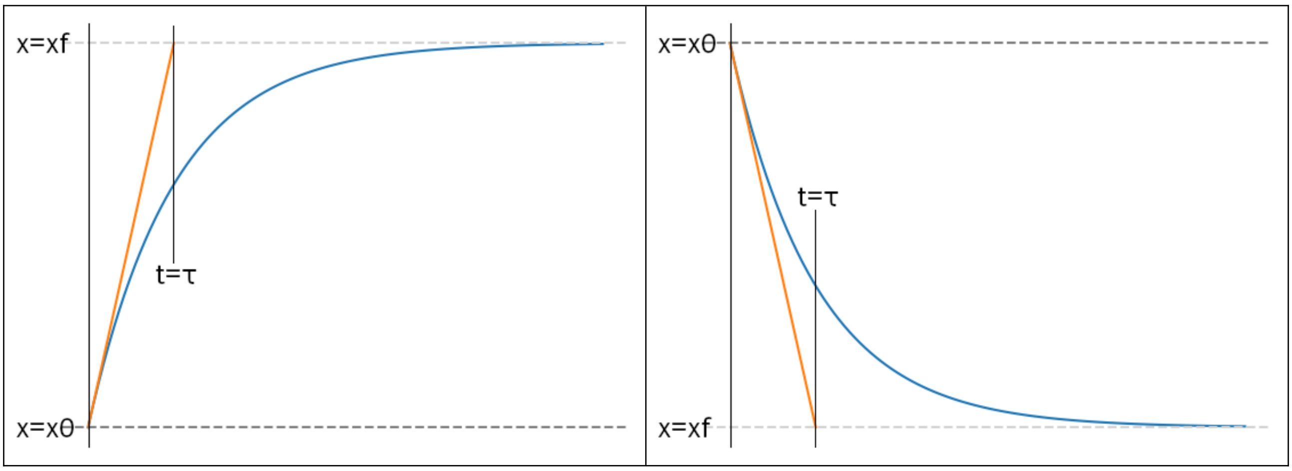
La solution de (1) est finalement :

$$\boxed{x(t)=(x_0-x_f)\times e^{-\frac{t}{\tau}}+x_f\ (2)}$$

• La décroissance $x(t)=x_0\times e^{-\frac{t}{\tau}}$ où $x_f=0$, et le cas $x(t)=x_f\times(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$ où $x_0=0$ sont les plus classiques.

4. Représentation – Équation de la tangente en t = 0

- Selon le signe de $x_0 - x_f$ le phénomène étudié sera croissant ou décroissant.

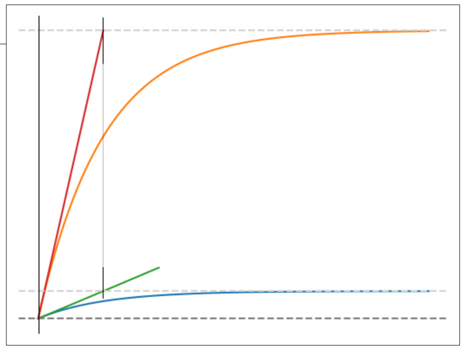


- D'après (1) la valeur de la dérivée en t = 0 est : $\frac{dx}{dt}(t=0)=\frac{x_f}{\tau}-\frac{x(t=0)}{\tau}$ soit $v_0=\frac{1}{\tau}(x_f-x_0)$.

D'où l'on déduit l'équation de la tangente à l'origine : $x=\frac{1}{\tau}(x_f-x_0)\times t+x_0$.

- Elle intercepte l'asymptote $x = x_f$ en $t = \tau$.

5. Interprétation



- Si la vitesse du phénomène était constante et égale à v_0, x_f serait atteint au bout d'une durée τ.

Comme τ est une grandeur caractéristique du système physique étudié, on ne peut pas agir sur v_0, et c'est la différence $x_f - x_0$ qui définit v_0.

- Avec $x_0 = 0$, le taux d'avancement du phénomène est : $\frac{x}{x_f}=1-e^{-\frac{t}{\tau}}$.

t	**0**	**$t_{1/2} = \tau \cdot \ln(2)$**	**τ**	**3τ**	**5τ**	**$\to \infty$**
$\frac{x}{x_f}$	0	0,5	0,63	0,95	0,99	1

- On considère généralement le phénomène comme terminé pour $t = 5\tau$.

6. Établir l'équation différentielle

- Les phénomènes suivants peuvent être modélisés par une évolution d'ordre 1 :

	$x_0 = 0$ ou $x_f = 0$	**$x_0 \neq 0$ et $x_f \neq 0$**
Croissance	Apparition des produits (Réaction χ) Charge d'un condensateur	Réchauffement (Loi de Newton)
Décroissance	Disparition d'un réactif en défaut Décharge d'un condensateur Radioactivité	Refroidissement (Loi de Newton)